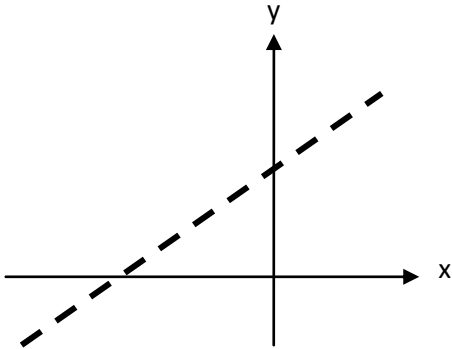
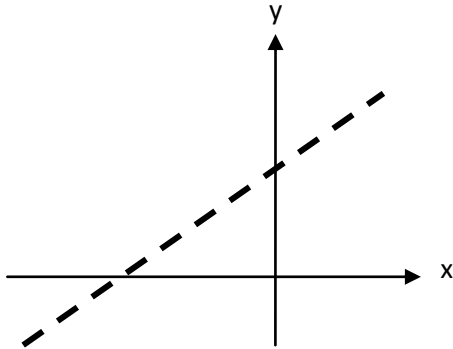
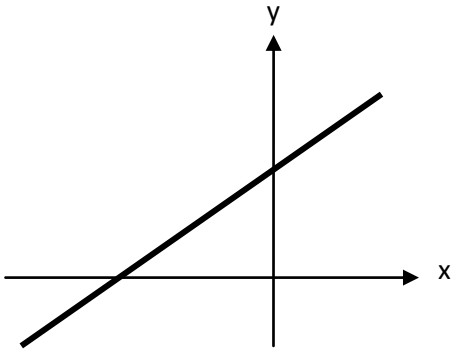
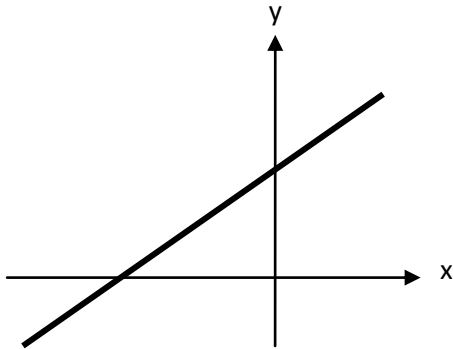
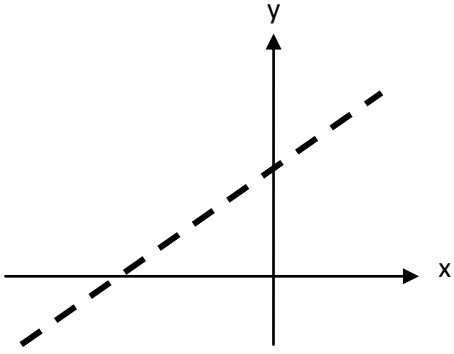
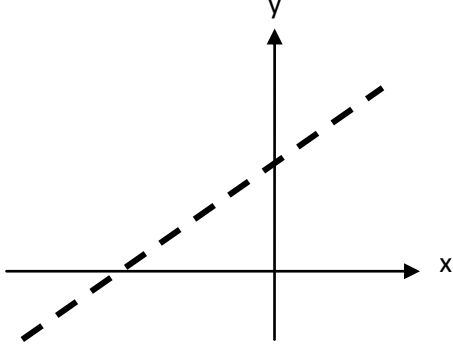
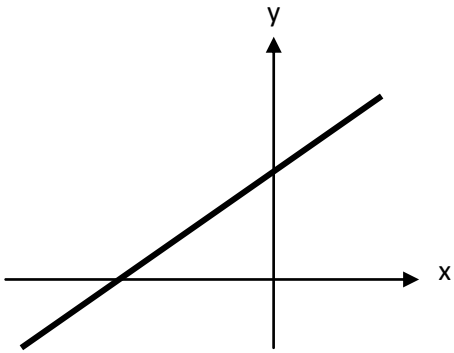
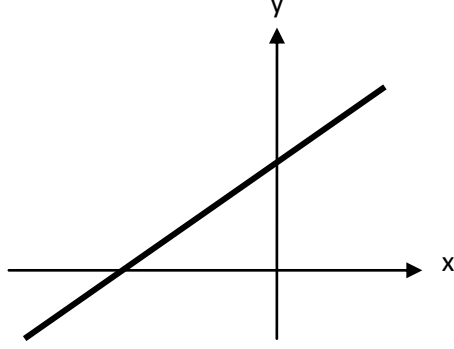


PERBEZAAN ANTARA PERSAMAAN LINEAR DENGAN KETAKSAMAAN LINEAR

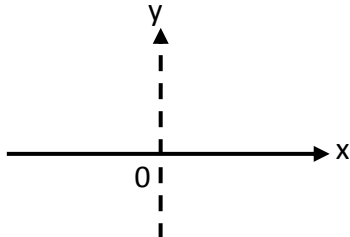
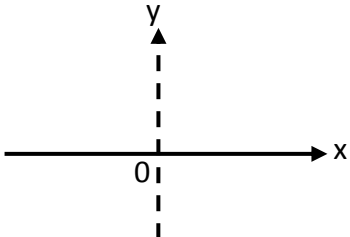
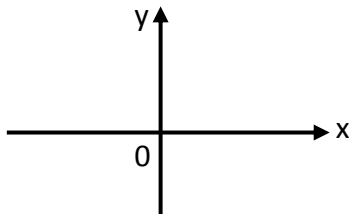
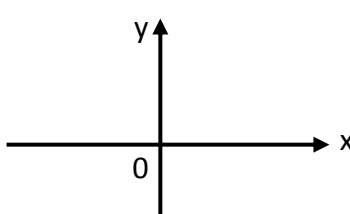
	Persamaan Linear	Ketaksamaan Linear
Simbol	$y = mx + c$ Ada simbol =	$>$ (Lebih besar) $<$ (Lebih kecil) $\geq$ (Lebih besar atau sama dengan) $\leq$ (Lebih kecil atau sama dengan)

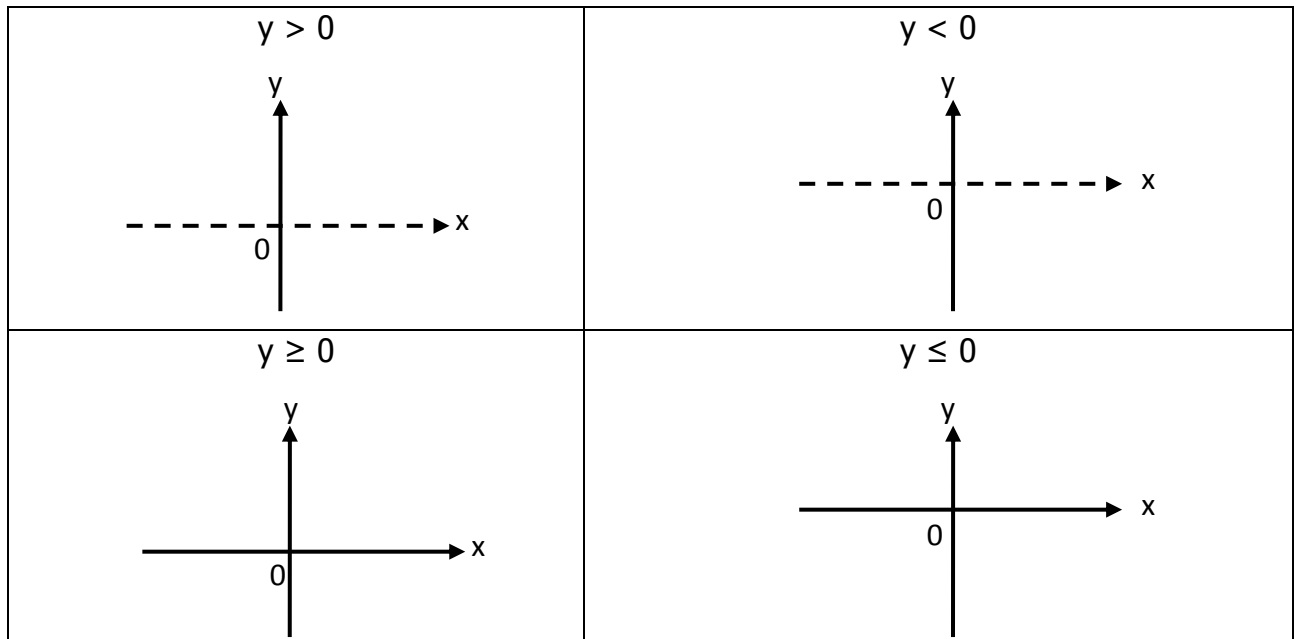
ASAS KETAKSAMAAN LINEAR

Ciri Graf	$y > mx + c$	$y < mx + c$
Garis lurus	 Garis putus-putus	 Garis putus-putus
	$y \geq mx + c$	$y \leq mx + c$
	 Garis penuh	 Garis penuh

Ciri Graf	$y > mx + c$	$y < mx + c$
Rantau berlorek		
	$y \geq mx + c$	$y \leq mx + c$
		

LAIN-LAIN KETAKSAMAAN LINEAR

$x > 0$ 	$x < 0$ 
$x \geq 0$ 	$x \leq 0$ 



RANTAU YANG MEMUASKAN KETAKSAMAAN LINEAR

Pembinaan rantau yang memuaskan ketaksamaan linear

- Sesuatu rantau dikatakan memuaskan ketaksamaan linear jika setiap titik dalam rantau itu memuaskan ketaksamaan linear tersebut.
- Seterusnya, sesuatu rantau dikatakan memuaskan ketaksamaan linear jika setiap titik dalam rantau itu memuaskan kesemua ketaksamaan linear tersebut.
- Langkah-langkah pembinaan :
 - i. Tukarkan ketaksamaan kepada bentuk persamaan am
 - ii. Lakarkan graf linear
 - iii. Lorekkan rantau yang memuaskan ketaksamaan yang diberi.

Contoh 1 :

Bina rantau yang memuaskan ketaksamaan $x - y \leq 5$.

Penyelesaian :

- i. Tukarkan ketaksamaan kepada bentuk persamaan am

Ketaksamaan linear	Bentuk persamaan am
$x - y \leq 5$	$x - y = 5$

ii. Lakarkan graf linear

x	0
y	?

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 0 - y &= 5 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

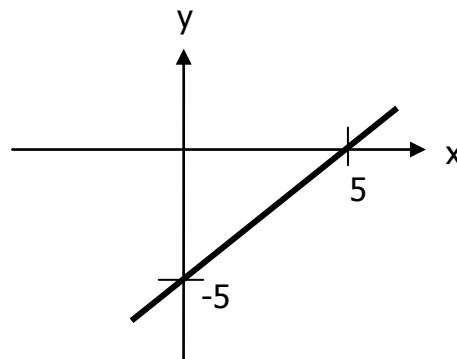
Maka,

x	0
y	-5

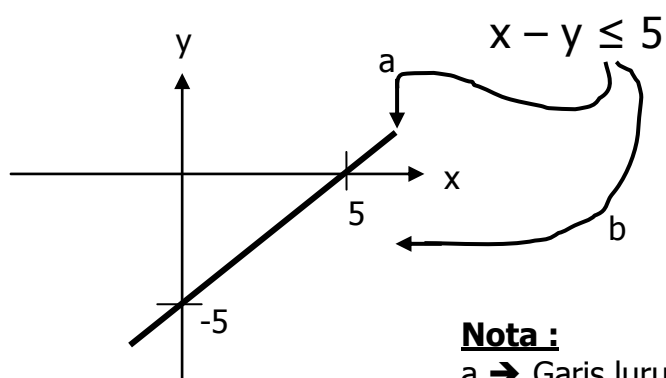
x	?
y	0

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x - 0 &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

x	5
y	0

 Bentuk lakaran
 graf linear


iii. Lorekkan rantau yang memuaskan ketaksamaan yang diberi


Nota :

a → Garis lurus penuh

b → Lorek rantau sebelah bawah

Contoh 2 :

Bina rantau yang memuaskan ketaksamaan $2x + 5y > 10$.

Penyelesaian :

- i. Tukarkan ketaksamaan kepada bentuk persamaan am

Ketaksamaan linear	Bentuk persamaan am
$2x + 5y > 10$	$2x + 5y = 10$

- ii. Lakarkan graf linear

x	0
y	?

$$\begin{aligned}
 2x + 5y &= 10 \\
 2(0) + 5y &= 10 \\
 5y &= 10 \\
 y &= \frac{10}{5} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Maka,

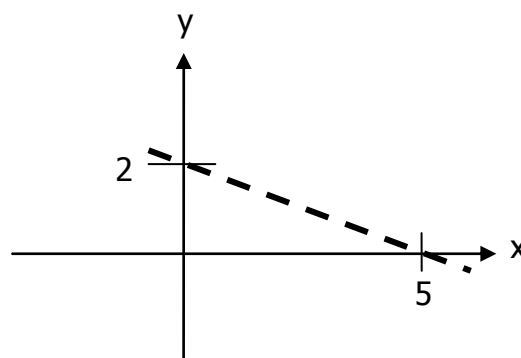
x	0
y	2

x	?
y	0

$$\begin{aligned}
 2x + 5y &= 10 \\
 2x + 5(0) &= 10 \\
 2x &= 10 \\
 x &= \frac{10}{2} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

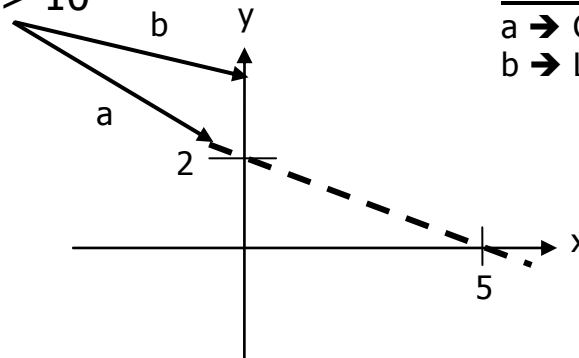
x	5
y	0

Bentuk lakaran
graf linear



- iii. Lorekkan rantau yang memuaskan ketaksamaan yang diberi

$$2x + 5y > 10$$



Nota :

a → Garis lurus putus-putus

b → Lorek rantau sebelah atas

Contoh 3 :

Bina rantau yang memuaskan ketaksamaan $y \leq x + 3$ dan $x + y + 3 > 0$.

Penyelesaian :

- i. Tukarkan ketaksamaan kepada bentuk persamaan am

Ketaksamaan linear	Bentuk persamaan am
$y \leq x + 3$ $x + y + 3 > 0$	$y = x + 3$ $x + y + 3 = 0$

- ii. Lakarkan graf linear

$$y = x + 3$$

Jika $x = 0$

x	0
y	?



$$\begin{aligned}
 y &= x + 3 \\
 y &= 0 + 3 \\
 y &= 3
 \end{aligned}$$

Maka,

x	0
y	3

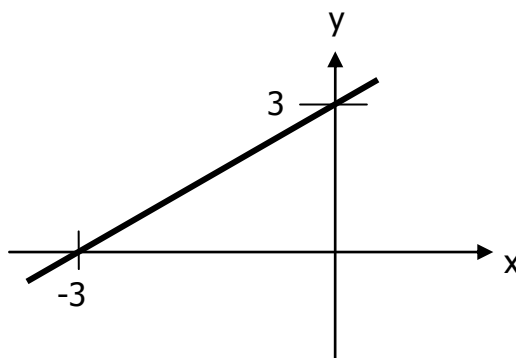
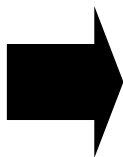
Jika $y = 0$

x	?
y	0



$$\begin{aligned}
 y &= x + 3 \\
 0 &= x + 3 \\
 x &= -3
 \end{aligned}$$

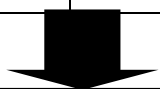
x	-3
y	0

Bentuk lakaran
 graf linear


$$x + y + 3 = 0$$

 Jika $x = 0$

x	0
y	?



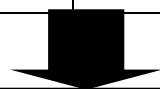
$$\begin{aligned} x + y + 3 &= 0 \\ 0 + y + 3 &= 0 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Maka,

x	0
y	-3

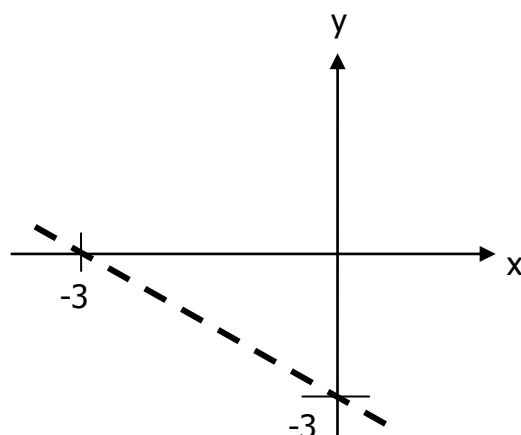
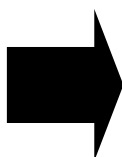
 Jika $y = 0$

x	?
y	0

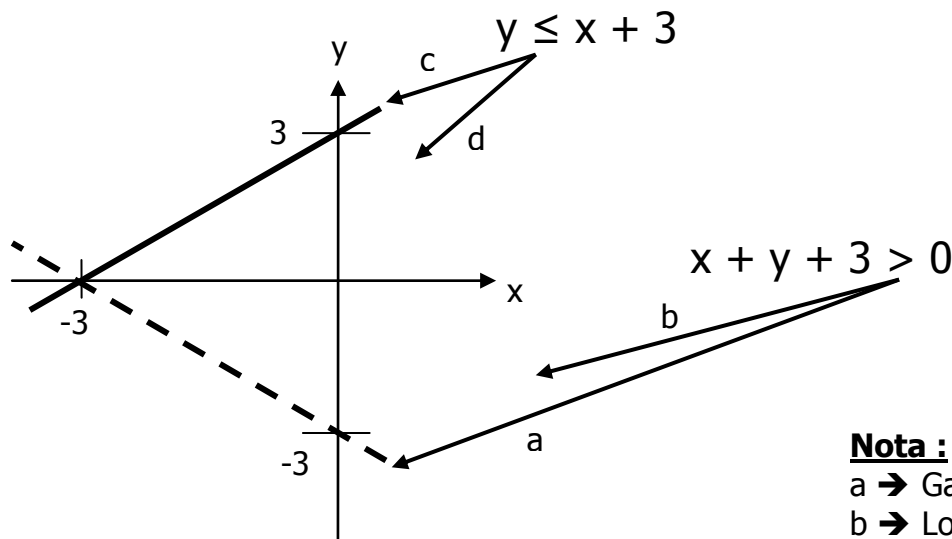


$$\begin{aligned} x + y + 3 &= 0 \\ x + 0 + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

x	-3
y	0

 Bentuk lakaran
 graf linear


iii. Lorekkan rantau yang memuaskan ketaksamaan yang diberi



Nota :

- a → Garis lurus putus-putus
- b → Lorek rantau sebelah atas
- c → Garis lurus penuh
- d → Lorek rantau sebelah atas

PENENTUAN KETAKSAMAAN YANG MENTAKRIFKAN SESUATU RANTAU

- Untuk menentukan ketaksamaan yang mentakrifkan sesuatu rantau, kita memilih sebarang titik (x_1, y_1) dalam rantau itu dan menggantikan koordinat bagi titik yang terpilih itu iaitu x_1 dan y_1 dalam persamaan garis-garis sempadan rantau itu. Ketaksamaan yang berkenaan kemudiannya boleh diperolehi.

- Langkah-langkah pentakrifan :

i. Tukarkan bentuk persamaan am kepada ketaksamaan

a. Lihat garisan lurus.

Garis penuh (—) → $\geq$ atau $\leq$

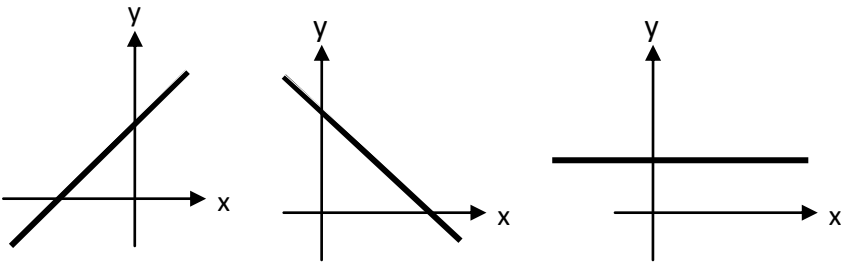
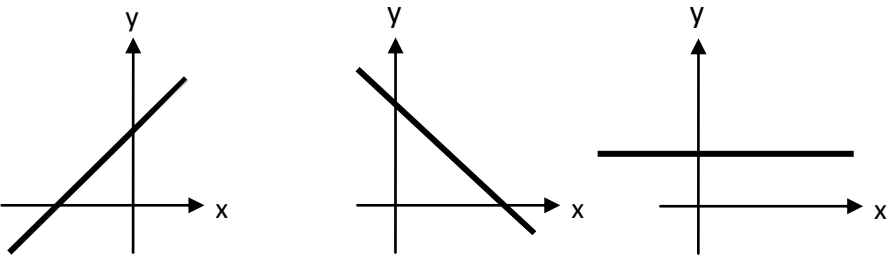
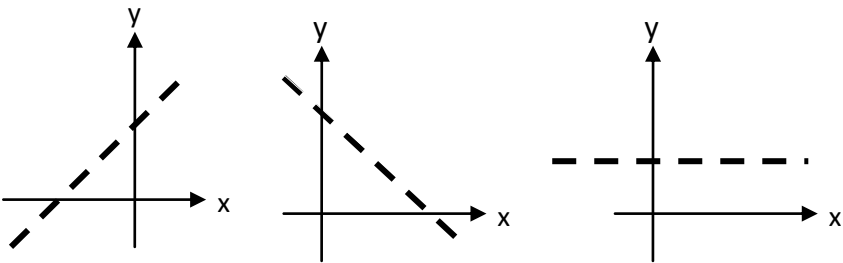
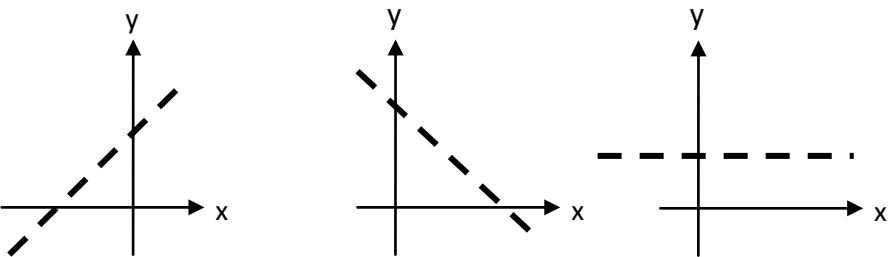
Garis putus-putus (- - -) → $>$ atau $<$

b. Lihat lorekkan rantau

Lorekkan diatas → $\geq$ atau $>$

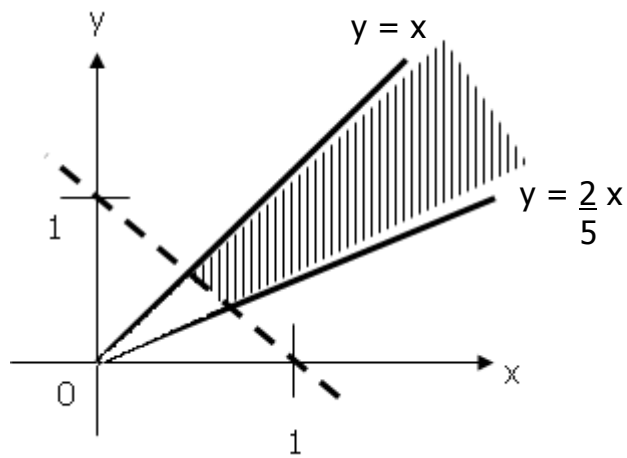
Lorekkan dibawah → $\leq$ atau $<$

Contoh :

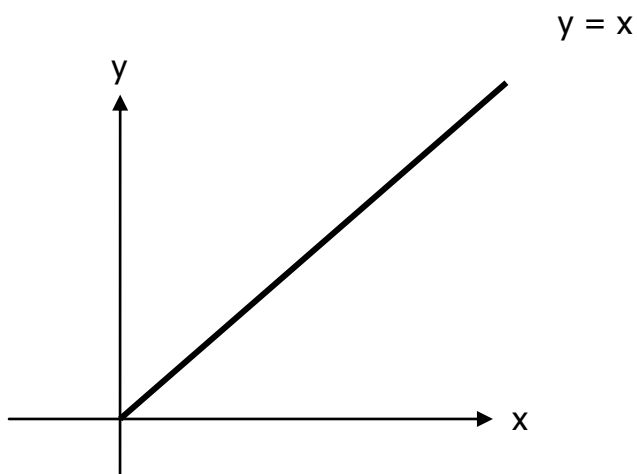
	Lorekkan rantau diatas dan garis penuh Simbol : $\geq$
	Lorekkan rantau dibawah dan garis penuh Simbol : $\leq$
	Lorekkan rantau diatas dan garis putus-putus Simbol : $>$
	Lorekkan rantau dibawah dan garis penuh Simbol : $<$

Contoh 4 :

Tuliskan 3 ketaksamaan yang menakrifkan rantau dalam rajah dibawah.


Penyelesaian :

i. $y \leq x$



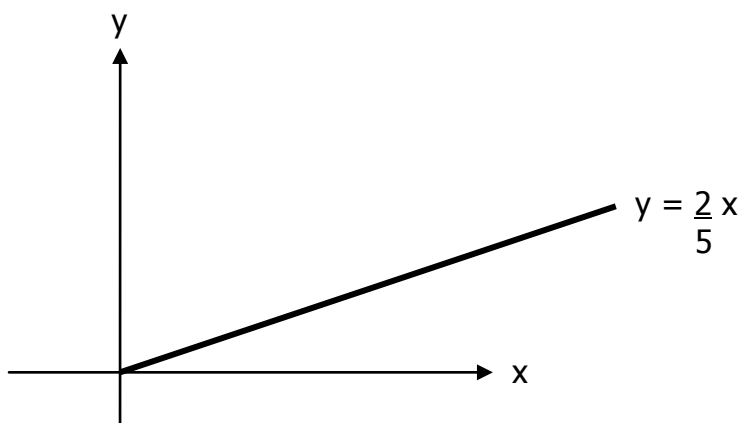
Lorekkan rantau dibawah dan garis penuh

Simbol : $\leq$

Maka,

$$y \leq x$$

ii. $y \geq \frac{2}{5}x$



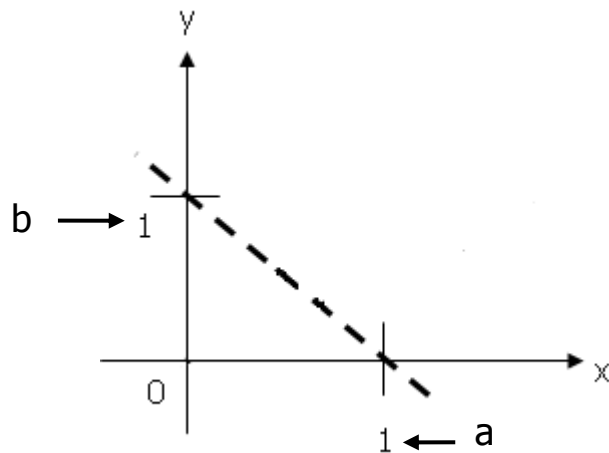
Lorekkan rantau diatas dan garis penuh

Simbol : $\geq$

Maka,

$$y \geq \frac{2}{5}x$$

iii. $x + y > 1$



Gunakan kaedah pintasan :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$$

$$x + y = 1$$

Lorekkan rantau diatas dan garis putus-putus

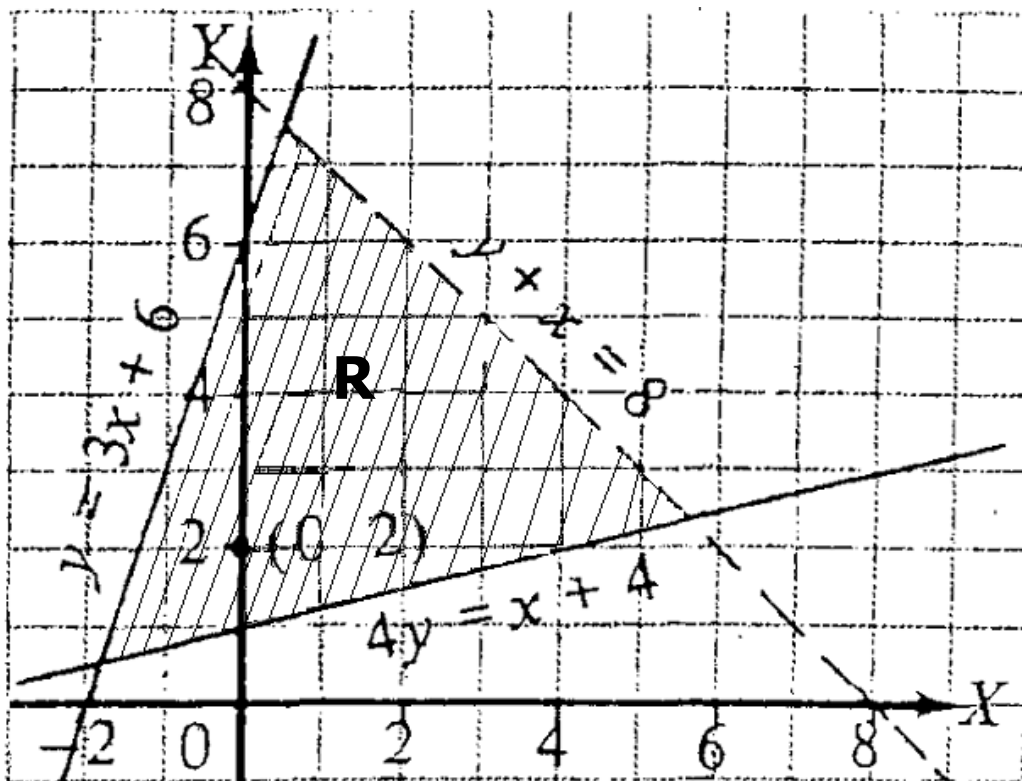
 Simbol : $>$

Maka

$$x + y > 1$$

Contoh 5 :

Tentukan ketaksamaan yang mentakrifkan rantau R dalam rajah di bawah


Penyelesaian :

Titik (0,2) dalam rantau R dipilih untuk semakan.

Persamaan Sempadan Rantau	Gantikan $x=0$ dan $y=2$ dlm persamaan	Ketaksamaan Rantau
$y = 3x + 6$	$2 < 3(0) + 6$	$y \leq 3x + 6$
$4y = x + 4$	$4(2) > 0 + 4$	$4y \geq x + 4$
$y + x = 8$	$2 + 0 < 8$	$y + x < 8$

Maka, rantau R ditakrifkan oleh :

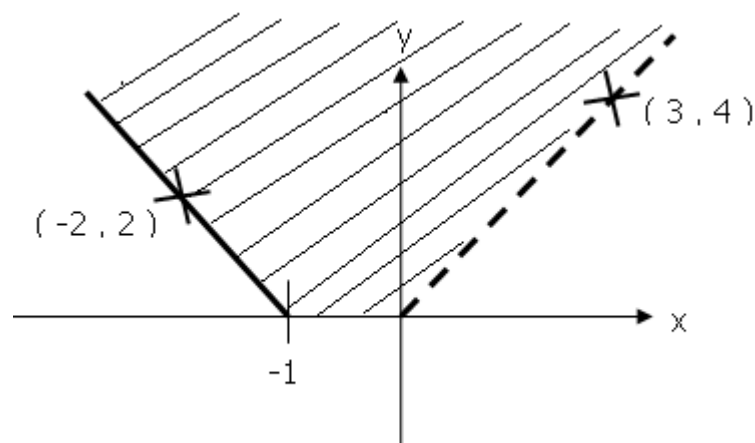
$$y \leq 3x + 6$$

$$4y \geq x + 4$$

$$y + x < 8$$

Contoh 6 :

Rajah dibawah menunjukkan suatu rantau terbuka. Nyatakan 2 ketaksamaan linear selain $y \geq 0$ yang menakrifkan rantau dibawah.



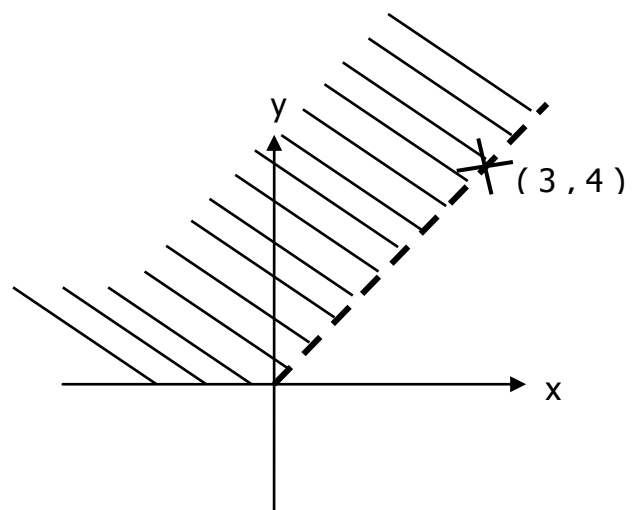
Penyelesaian :

- i. $(0,0)$ dan $(3,4)$

$$\text{Kecerunan, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{4 - 0}{3 - 0}$$

$$= \frac{4}{3}$$



Pintasan y , $c = 0$

Persamaan am,

$$y = mx + c$$

$$y = \frac{4}{3}x + 0$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

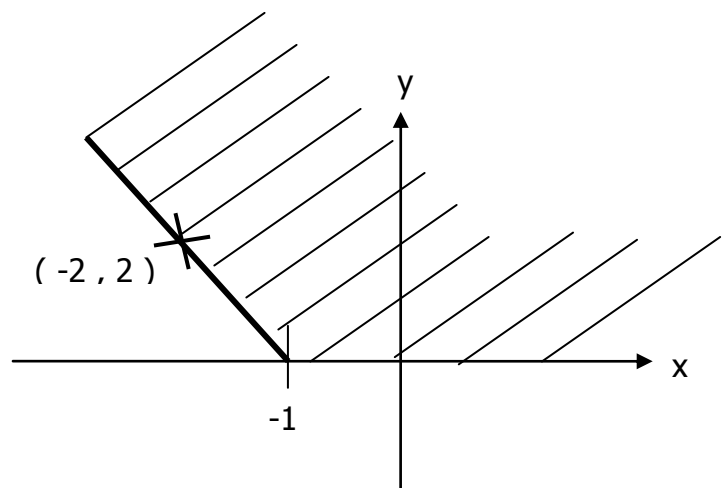
Disebabkan lorekan rantau diatas dan garis putus-putus, simbol : $>$

Maka ketaksamaan linear ialah

$$y > \frac{4}{3}x$$

ii. $(-1, 0)$ dan $(-2, 2)$

$$\begin{aligned}\text{Kecerunan, } m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2 - 0}{-2 - (-1)} \\ &= \frac{2}{-1} \\ &= -2\end{aligned}$$



Untuk mencari pintasan y , nilai kecerunan dan satu titik koordinat dimasukkan ke dalam persamaan am.

$$y = mx + c$$

Titik koordinat $(-1, 0)$

Kecerunan, $m = -2$

Maka,

$$y = mx + c$$

$$0 = -2(-1) + c$$

$$0 = 2 + c$$

$$c = -2$$

Persamaan am $\Rightarrow y = -2x - 2$

Disebabkan lorekkan rantau diatas dan garis penuh, simbol : $\geq$

Maka ketaksamaan linear ialah

$$y \geq -2x - 2$$

PENTAFSIRAN MASALAH & PEMBENTUKAN KETAKSAMAAN ATAU PERSAMAAN YANG BERKENAAN

- PERMASALAHAN**

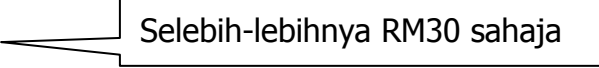
Contoh 7 :

Laili ingin membeli beberapa buah buku rujukan dan buku kerja dengan menggunakan selebih-lebihnya RM30. Sebuah buku rujukan berharga RM5, manakala sebuah buku kerja berharga RM3.

- a) Berapakah bilangan buku rujukan yang dapat dibeli oleh Laili, jika dia tidak membeli sebarang buku kerja?
- b) Berapakah bilangan buku kerja yang dapat dibeli oleh Laili, jika dia tidak membeli sebarang buku rujukan?
- c) Jika Laili ingin membeli 2 buah buku rujukan sahaja, berapakah bilangan buku kerja yang dapat dibelinya?
- d) Jika Laili ingin membeli 4 buah buku kerja sahaja, berapakah bilangan buku rujukan yang dapat dibelinya?

Penyelesaian :

- a) Harga bagi x buah buku rujukan = RM $5x$

Maka, $5x \leq 30$ 

$$x \leq 6$$

Bil maksimum buku rujukan yang dapat dibeli Laili ialah 6 buah

b) Harga bagi y buah buku rujukan = RM $3y$

Maka, $3y \leq 30$

$$y \leq 10$$

Selebih-lebihnya RM30 sahaja

Bil maksimum buku kerja yang dapat dibeli Laili ialah 10 buah

c) Harga bagi 2 buah buku rujukan = RM 10

Maka, $10 + 3y \leq 30$

$$3y \leq 20$$

$$y \leq 20/3$$

$$y \leq 6$$

Jumlah Harga Tidak Melebihi RM 30

Bilangan buku mestilah suatu no bulat

Maka, bilangan maksimum buku rujukan yang dapat dibeli Laili ialah 6 buah

d) Harga bagi 4 buah buku kerja = RM 12

maka, $5x + 12 \leq 30$

$$5x \leq 18$$

$$x \leq 18/5$$

$$x \leq 3$$

Bilangan buku mestilah suatu no bulat

Bilangan maksimum buku rujukan yang dapat dibeli Laili ialah 3 buah

PENGATURCARAAN LINEAR MELALUI KAEDAH GRAF

Lukisan Garis-Garis Selari $k = ax + by$ dengan Nilai k Yang Berlainan

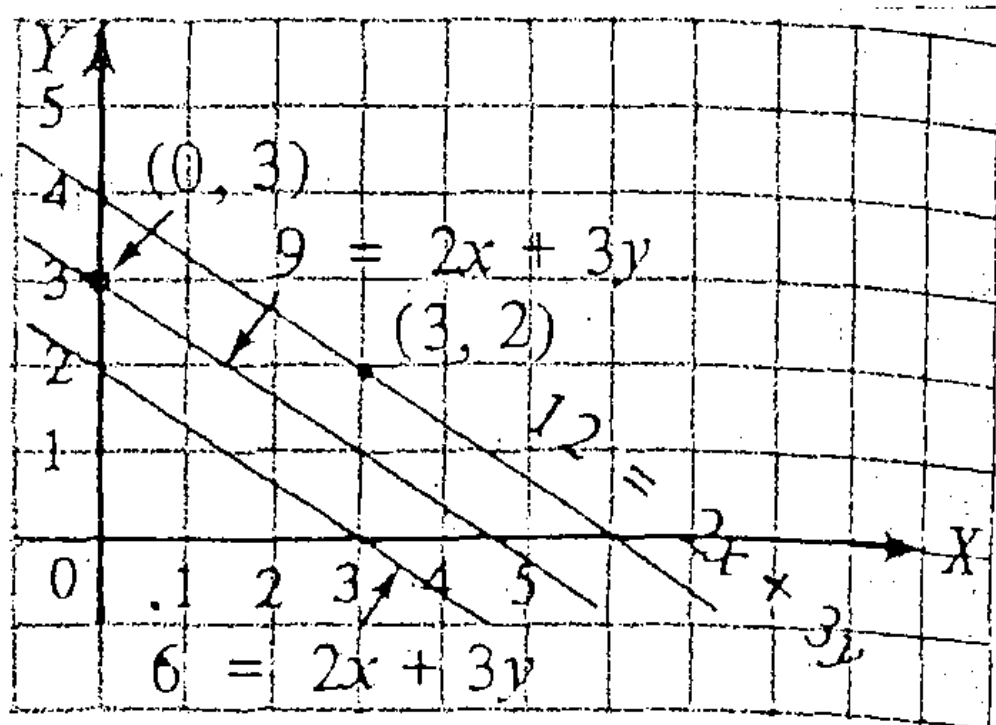
Contoh 8 :

Lukis garis $6 = 2x + 3y$. Dengan pembaris dan sesiku, lukis 2 garis selari $k = 2x + 3y$ yang masing-masing melalui titik $(0,3)$ dan $(3,2)$.

Kemudian, tentukan nilai k bagi setiap garis yang dilukis dan seterusnya , tulis persamaan garis-garis selari itu.

Penyelesaian :**Langkah 1 :**

Lukiskan garis $6 = 2x + 3y$ dan 2 garis selarinya $k = 2x + 3y$ dilukis seperti dalam rajah berikut :



Langkah 2 :

Persamaan am garis selari ; $k = 2x + 3y$.

Jika grs lurus melalui (0,3), maka , $k = 2 (0) + 3 (3) = 9$.

Jadi, persamaan garis yang melalui (0,3) ialah $9 = 2x + 3y$

Langkah 3 :

Persamaan am garis selari ; $k = 2x + 3y$.

Jika garis lurus melalui (3,2), maka , $k = 2 (3) + 3 (2) = 12$.

Jadi, persamaan garis yang melalui (3,2) ialah $12 = 2x + 3y$

PENENTUAN NILAI OPTIMUM $AX + BY$ DI BAWAH KEKANGAN TERTENTU

Contoh 9 :

Bina rantau yang memuaskan ketaksamaan $3x + 2y \leq 60$, $x + 2y \leq 30$, $x \geq 10$ dan $y \geq 10$.

Jika (x,y) ialah satu titik dalam rantau ini, cari niali minimum bagi $x + 2y$ dan nilai maksimum bagi $2x + y$.

Penyelesaian :

Langkah 1 :

Lukis garis lurus $3x + 2y = 60$, $x + 2y = 30$, $x = 10$ dan $y = 0$

Langkah 2 :

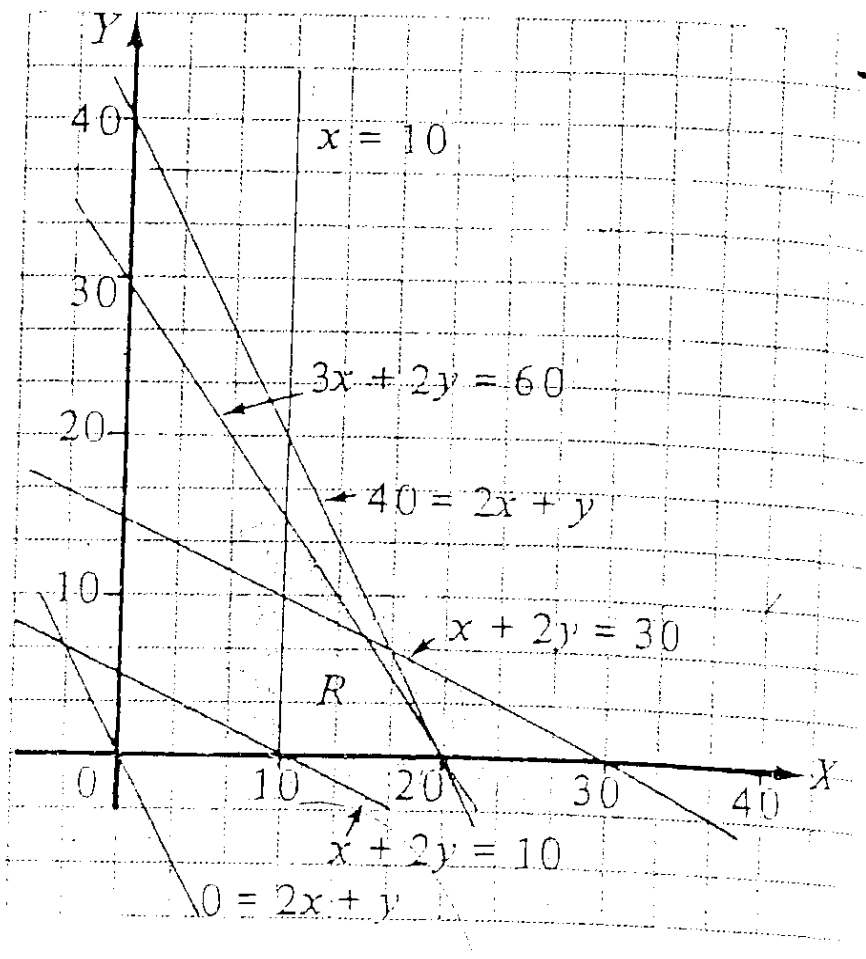
Bina rantau R yang memuaskan ketaksamaan $3x + 2y \leq 60$, $x + 2y \leq 30$, $x \geq 10$ dan $y \geq 10$

Langkah 3 :

Dengan menggunakan pembaris dan sesiku, lukis satu garis lurus yang selari dengan $30 = x + 2y$, yang merentasi rantau R dan mempunyai nilai pintasan $-y$ yang terkecil

Langkah 4 :

Lukis garis lurus $0 = 2x + y$. Dengan menggunakan pembaris dan sesiku, lukis garis lurus yang selari dengan $0 = 2x + y$, yang merentasi rantau R dan mempunyai nilai pintasan- y terbesar.



- Daripada graf, didapati garis yg mempunyai nilai pintasan y terkecil melalui $(10,0)$ dimana ia terletak dalam rantau R

Jadi, nilai minimum bagi

$$x + 2y : 10 + 2(0) = 10$$

- Daripada graf, didapati garis yg mempunyai nilai pintasan yang terbesar melalui $(20,0)$ di mana ia terletak dlm rantau R

Jadi, nilai maksimum bagi

$$2x + y : 2(20) + 0 = 40$$